CONCURSUL JUDEȚEAN
"Trepte în matematică și comunicare" Memorial FLORIAN PANĂ
Ediţia a XX-a, 16 mai 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE_____Clasa a XI-a (M_1 Mate-info)

Subiectul I (20p)

1. Fie $f_n(x)=\frac{2x}{1+x^2}+2\cdot\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+...+n\cdot\frac{2^n x^n}{\left(1+x^2\right)^n}, x\in\mathbb{R}_+^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pentru x fixat.

Soluție:

Pentru $x=1\Rightarrow f_n(1)=\frac{n(n+1)}{2}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\infty$ 3p

Pentru $x\neq 1$ și cu notația $y=\frac{2x}{1+x^2}, y\neq 0$ și $y\neq 1$ se obține $y\left(1+2y+3y^2+...+ny^{n-1}\right)\overset{not}{=}yS_n$

$S(y)=\frac{ny^{n+1}-(n+1)y^n+1}{(1-y)^2}$ 5p

$y\in(0,\ 1)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S(y)=\frac{1}{(1-y)^2}$, revenind la x: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{2x\left(1+x^2\right)}{(x-1)^4}$ 2p

1. Calculaţi derivata de ordin n a funcției care satisface relația $2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x, x>1$

Soluție:

Cu notația $\frac{x+1}{x-1}=y\Rightarrow\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{y}$. Se obtine $x=\frac{y+1}{y-1}$ 1p

Relația devine: $2f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y+1}{y-1}$ și pt $y\to\frac{1}{y}$ avem $2f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)=\frac{y-1}{y+1}=-\frac{y+1}{y-1}$ 3p

Se obține $f(y)=\frac{y+1}{y-1}$ deci $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 3p

$f(x)=1+\frac{2}{x-1}\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ 3p

Subiectul al II-lea (25p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}-x+y\cdot\cos C+z\cdot\cos B=0\\ x\cdot\cos C-y+z\cdot\cos A=0\\ x\cdot\cos B+y\cdot\cos A-z=0\end{cases}$ unde A, B, C sunt unghiurile unui triunghi .

a) Rezolvați sistemul pentru un triunghi dreptunghic in A, iar unghiurile B și C au măsurile de 30° respectiv 60° .

b) Rezolvați sistemul pentru un triunghi oarecare.

Soluție:

a) Sistem omogen, $s_1=(0,0,0)$ 1p

A = 90°, B = 30°, C = 60°, $\sin 90^\circ=1,\ \sin 30^\circ=1/2,\ \sin 60^\circ=\sqrt{3}/2$ 1p

$\Delta_S=0$, sistemul admite soluții nenule.....1

Sistemul este compatibil simplu nedeterminat, $S=\frac{\alpha}{2}\left(2,1,\sqrt{3}\right),\ \alpha\in\mathbb{R}$ 2p

b) Sistem omogen, $s_1=(0,0,0)$ 1p

$\Delta=\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C-1$ .....2p.

Se folosește: **Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi,** $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=1$

Deci $\Delta_S=0$, sistemul are și soluții nenule. 3p

Observăm că: $x=\sin A,\ y=\sin B,\ z=\sin C$ satisface sistemul. De exemplu: $-\sin A+\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=0$

$\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B$ iar $B+C=\pi-A$.....2p

$S=\beta(\sin A,\sin B,\sin C),\beta\in\mathbb{R}$ 2p

CONCURSUL JUDEȚEAN
“Trepte în matematică și comunicare” Memorial FLORIAN PANĂ
Ediţia a XX-a, 16 mai 2026

2. Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^n + X^{n-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, n \in \{1,2,3\}$.

Soluție:

Pentru $n=1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 3p

Pentru $n=2 \Rightarrow X^2 + X = A$. Înmulțim la stânga si dreapta relația cu X și deducem $AX = XA$ 1p

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$ 1p

$A = 2I_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, iar $B^2 = O_2$ 1p

$X = mI_2 + nB$, $X^2 = m^2 I_2 + 2mnB \Rightarrow X^2 + X = \left(m^2 + n\right) I_2 + \left(2mn + n\right) B$ 2p

Prin identificare coeficienți se obține sistemul $\begin{cases} m^2 + n = 2 \\ n\left(2m+1\right) = 1 \end{cases}$ cu soluțiile: $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ și $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$

Finalizare $X_1 = I_2 + \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $X_2 = -2I_2 - \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.....2p

Pentru $n=3$, cu notațiile de la cazul $n=2$, avem $X^3 = m^3 I_2 + 3m^2 nB$

$\Rightarrow X^3 + X^2 = \left(m^3 + m^2\right) I_2 + \left(3m^2 n + 2mn\right) B$ 3p

Prin identificare coeficienți se obține sistemul $\begin{cases} m^3 + m^2 = 2 \\ mn(3m+2) = 1 \end{cases}$ cu soluția $\left(1; \frac{1}{5}\right)$

Finalizare $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$.....2p